

2009.7.14

Frictional resistance of a polyethylene-base model ski at low velocity: Dependence of the temperature, the velocity and the pressure

**Kunio Nikki, Katsumi Kaneko, Satoru Saito, Hideaki Kasahara, Hikaru Nakazato,
Ichiro Tomisawa, Syoji Haizuka^a, Osamu Abe^b, Akira Ishii^c**

^a The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo, Japan

^b Sinjo Branch, Snow and Ice Research Center, NIED

^c Kagawa University, Takamatsu, Kagawa, Japan

Abstract

Frictional resistance coefficients (μ) of a model ski (20 cm length) at low gliding velocity (0.001~1 m/s) were observed near the melting point of snow by means of the slope glides method and the tribometer method. The μ values were depending upon the gliding velocity and the snow temperature. The smallest μ was observed at around -10 °C and slower than 0.01 m/s. A noteworthy result of the temperature dependency was the opposite effect with the actual skis. As an obvious load effect was not observed at low velocity with the model ski, it is suggested a possibility that the μ of the model ski becomes small without generation of melt water-film by the frictional heating on snow, which suggests the main mechanism of frictional resistance is regarded as adhesion. Opposite temperature dependence of the μ accompanied with gliding velocity was explained with the adhesion phenomenon resulting of the existence of liquid-like layer on the snow surface.

Author Keywords: Frictional resistance coefficient; Polyethylene; Snow temperature; Gliding velocity; Melt-water lubrication; liquid-like layer; Adhesion

Article Outline

- 1. Introduction**
- 2. Materials and Methods**
- 3. Experimental Results and Discussions**
- 4. Conclusions**

Acknowledgements

References

1. Introduction

There is a long history of the study of ski gliding related to so-called “friction” (Lind and Sanders, 1997). Generally, the term “friction” is including all of effects that cause gliding resistance. It is easy to understand that the plastic snow deformation under the ski, and/or the pack and plow resistances at the front of the ski and the aerodynamic resistance of the top bend (and the skier) are important factors for an actual ski gliding on weakly packed snow. Few quantitative experimental results, however, have been reported concerning those additional resistances except the aerodynamic one. For the elucidation of frictional resistance of ski gliding, the simple mechanical concept of friction between the ski and the snow should be discriminating from the whole gliding resistance. Ski gliding resistance at low velocity on the flat and stiffly packed snow would be similar to the value on the ice, and can then be considered the common frictional resistance. For ice-ice interaction, gliding resistance at very low velocity and very low temperature were frequently studied. In this paper, the low velocity expresses 0.001 to 1 m/s, the low temperature means -10 to -20 °C, and the high temperature is -5 to 0 °C.

It is well-known that the kinetic frictional coefficient (μ) of ski is exceedingly small in comparison with the μ of the usual solid-solid contact. The low friction is thought to result from the friction heating between surfaces of the slider sole and the snow. The heat generates a thin melt-water layer that works a lubricant and then reduces the friction force between solids. (Bowden and Hughes, 1939) There is much evidence to support the idea of melt-water lubrication. For examples, the melt-water has been observed in a laboratory experiment for an interface between the slider sole and the ice where the frictional heat is accumulated. (Tusima and Yoshida, 1969) The temperature rises of the sole were observed near the melting point (-10 to 0 °C) by thermocouple when a down-hill ski glided with 2 to 10 m/s. The upper most temperature of gliding ski base was depending upon the ambient temperature. (Colbeck and Warren, 1991) Recently, the influence of the snow temperature (the lowest of μ appeared at around -3 °C) under racing condition was emphasized. (Buhl et al., 2001) Additionally, gliding theories other than the melt-water lubrication were proposed to understand the ski gliding in various conditions. A lot of works related to the snow friction were reviewed and discussed by Colbeck. (Colbeck, 1992)

For understanding the physics of interfacial phenomena of ski gliding on snow, the knowledge of the real contact area, the conduction of the heat and the role of the melt-water seem to be essential. But the μ value of an alpine ski is usually very small

(less than 0.05), then it is impossible to estimate the influence of the individual energy loss of gliding resistances from the observed μ of actual skis. When the ski starts to glide, the temperature of a snow surface which contact with the ski is heated with the friction and the heat is accumulated to be the ski passed away. The view from the ski, the heat is accumulated for the ski sole by friction with snow surface, but the top part of the sole is always cooling by the coming new snow and air. Then the temperature of ski sole would be depending upon the distance from the ski top. The frictional condition is also different with the sole position. The heat accumulation is also depending upon the heat conduction of ski materials, the snow condition, ambient temperatures and so on. Only an average μ value of a sliding ski could be obtained by the experiment. It is impossible to analyze the friction state at individual sole position by changing the friction parameters on experiments. It is also difficult to estimate the real contact area of the gliding skis. We can observe temperatures of a ski sole but cannot observe temperatures of the surface of snow particles which rubbed by the ski. As the μ value of a short slider is equivalent to that of the head part of the real ski, the mechanism of the friction would be simple and the heat accumulation would not be occurred especially for the slow velocity.

In this paper, nearly the intrinsic frictional resistance of a short model ski at low velocity were observed by means of the tribometer method and the slope glides method with carefully prepared hard packed flat snow in the Cryospheric Environment Simulator of NIED with an artificial snow and in the fresh air condition of the Sugadaira Observatory of the University of Electro-communications in Nagano with variety of natural snows. The snow temperature, the gliding velocity and the load effects of the μ were observed and the mechanism of the frictional resistance was discussed.

2. Materials and Methods

Gliding frictions at low velocity of a short model ski (a polyethylene-base slider) on packed snow were measured by means of the slope glides method and the tribometer method.

2.1 The Model Ski

The model ski was a remake of an actual alpine ski with polyethylene-sole. It was cut for a certain length and made the sliding surface flat by means of the insertion of a duralumin plate on the sole polyethylene. The length and the width of a model ski are

20 and 8 cm, respectively. The weight is changeable to be four times. No wax was used.

2.2 The Snow Preparation

Artificial snow which made in the Cryospheric Environment Simulator of NIED and variety of natural snows at Sugadaira in Nagano were used as sample snows. The snow was compacted by pushing it with boots in a plastic box for about 15 minute and was passed it through a sieve. The prepared snow was placed on the turn table of the tribometer or the snow slope box which use for the slope glides method and made the snow surface flat. Snow hardness is an important factor to discriminate the energy loss of ski sink into the snow from the sliding resistance, but it is not easy to control the surface one. (Hamalainen and Spring, 1986) On the other hand, snow density is easy to control and seems an important factor correlating to the effect of ski sink into the snow. In this paper, the snow densities of the test snow track were prepared to be same for a series of experiment. The density of the sample snow was fixed to be $360 \sim 550 \text{ kg/m}^3$. Before the experiment, the snow was sintered for 6 to 16 hours at the observed temperature to harden the surface.



Fig. 1. Original snow crystals and the packed snow surface after sintering. (The grid expresses 1 and 2 mm for the snow crystals and the snow surface, respectively.)

The surface hardness of the test snow was observed by a home made penetrate type of hardness meter. Indented depth was about 0.02 mm with the 2 kg/cm^2 of pressure (diameter of the pressure head was 1 cm). The depth was the same order of size with the snow grain. The pressure of the contact area of the model ski was about 4 g/cm^2 (1/2 of the real ski). It may be given as a conclusion that the surface snow condition was hard enough compare to the actual ski gliding, which indicates that the plastic snow deformation and/or the pack and plow resistances are negligible.

2.3 Methods for Measurement of Frictional Coefficients

2.3.1 The slope glides method.

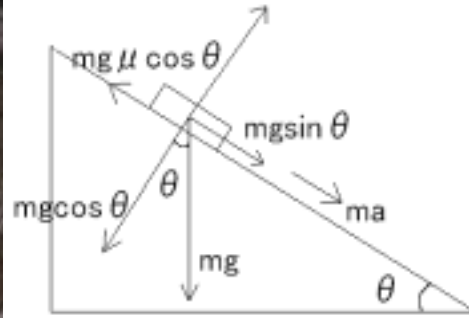
As shown in Fig. 2, a model ski (20 cm length) glides on packed flat snow slope. The position of the model ski is observed by means of an ultrasonic distance sensor (KEYENCE UD-501, sampling time:17.5 ms, accuracy of distance at 0.5 m/s:8 mm). The force balance of a slider on slope is shown in Fig. 2 (b). The friction force (F) of a slider on the slope is expressed as a next equation.

$$F = mg\mu\cos\theta = mg\sin\theta - m\alpha$$

Where m is the weight of a slider, g is the gravitational acceleration, θ is the angle of the slope, μ is the coefficient of kinetic friction and α is the acceleration of the slider. The gliding velocity, the acceleration and then the μ are deduced by the distance data and the time.



Fig. 2. (a)The slope glides method. slope.



(b)The force balance of a model ski on

As shown in Fig.3, the mutual relation of distance vs. time is obtained by the ultrasonic distance sensor. The velocity of the slider vs. time is deduced from the time and distance relation.

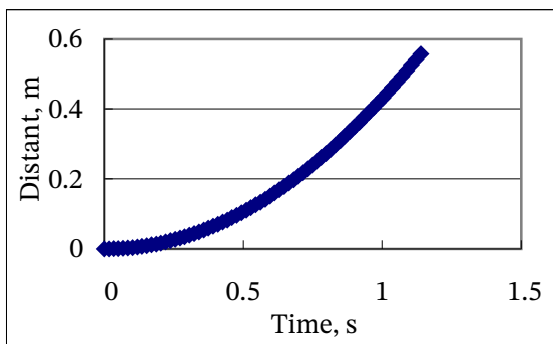


Fig. 3. An example of the time vs. the distance data of a gliding.

2.3.2 The tribometer method.

A schematic diagram of the tribometer is presented in Fig. 4. (Tomisawa et. al. 2000) As the diameter of the turn-table is 180 cm, the snow track can be regarded as a pseudo-straight track for the model ski (length: 20 cm, width: 8 cm) at low gliding velocity (the centrifugal force of friction is negligible small). The slider “S” is strapped to a static frame “L” via a load cell and the large snow-table is rotating under the model ski by an electric motor with a speed controller. Snow surface of the track on the table is prepared by a flattening blade “FB” which is fixed to the static frame “L” as horizontal accurately. The apparent μ is easily deduced by measuring the traction force “ T ” of the slider by using the load cell. ($T = \mu \times mg$) The actual track rotation angle and the velocity are measured with a rotary encoder “R” located at the center of the table.

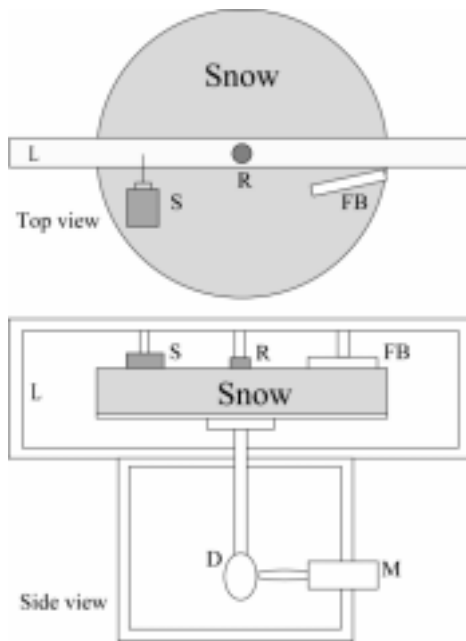


Fig. 4. (a) A schematic diagram of the tribometer. (L: Static frame, FB: Flattening blade, S: Slider, R: Rotary encoder, D: Differential gear box, M: Motor)



(b)The model ski is gliding over the flat snow surface of the tribometer.

3. Experimental Results and Discussions

3.1 Temperature effect of μ . (The slope glides method)

The model ski (length 20 cm) was glided over the flat slope made of natural snows such as new snow, compacted snow and depth hoar. The μ were observed at around 0.3 m/s in the fresh air condition of Sugadaira in Nagano prefecture. The μ vs. the snow temperature is shown in Fig. 5.

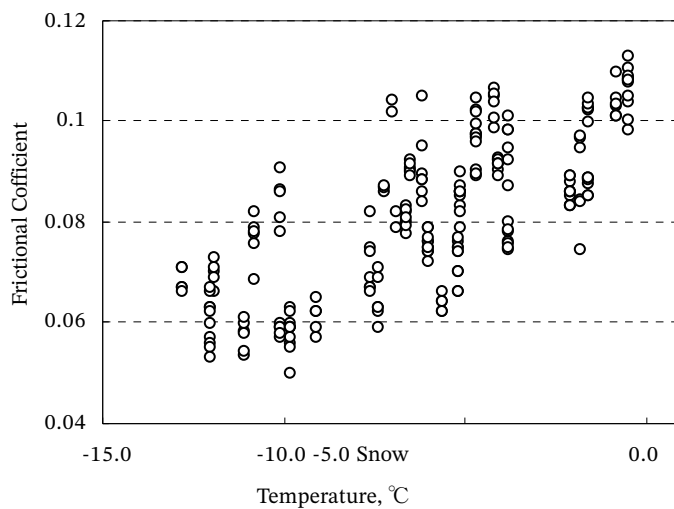


Fig. 5. The μ value vs. temperature of variety of natural snows by means of the slope glides method in Sugadaira. (The gliding velocity was around 0.3 m/s.)

It was found that the μ values were decreasing with going down the snow temperature. This behavior of the μ is an opposite temperature dependency with the well-known results of a small slider at high velocity. (Bowden and Hughes, 1939) Furthermore, the μ at around -10 °C (ca. 0.05) was the close value with the best gliding condition of the

actual alpine ski at -3 to -5°C. (Buhl et. al., 2001)

3.2. Velocity effect of μ . (The tribometer method)

Further accurate velocity effects of the μ were observed with the tribometer which gliding velocity was controlled to be constant by an electric motor in the Cryospheric Environment Simulator of NIED. For the slope glides method, the gliding velocity is reached to 1 m/s within 3 sec from the ski start to glide. The temperature of the gliding surface of the ski will be going up simply, even the regenerate happened. On the other hand for the tribometer, the model ski is gliding with a constant velocity for long time. Both the regenerate effect and the cooling effect by new snow have to consider at the same time for the friction surface. From the view of the model ski, the gliding condition will be constant during the same gliding velocity. An arborescent type artificial snow which made at -15 °C and stored in a polyethylene bag at -20 °C for 2 month was used for our experiment. The compacted artificial snow was crushed to particles, passed those through a sieve, compacted in a box and put those on the turn-table of the tribometer. It was sintered for 16 hours after flattening the surface at the observed temperature. The μ vs. gliding velocity at several temperatures are shown in Fig. 6.

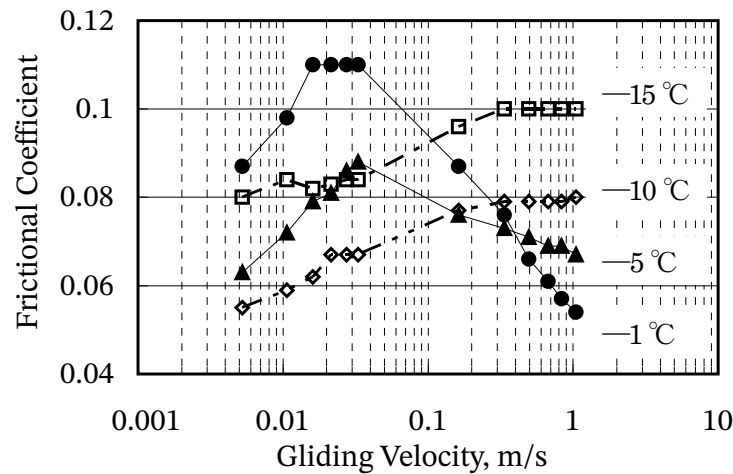


Fig. 6. The μ vs. gliding velocity for an artificial snow at several temperatures. (The tribometer was used in the Cryospheric Environment Simulator of NIED)

The observed data were classified into 3 patterns as shown in Fig. 7.

a) The μ of fast glides (higher than 0.5 m/s) near the melting point were decreasing with increase the velocity. Here after this phenomenon is called as **[Pattern A]**. 8

- b) The μ of very low glides (lower than 0.02 m/s) were decreasing with decrease the velocity, which absolute values were decreasing with going down the snow temperature between -1 and -10 °C. As the same with Fig.5, the opposite temperature dependency with the actual ski of the μ was shown. Here after this phenomenon is called as **[Pattern B]**.
- c) The μ of very cold conditions (lower than -10°C) were decreasing with decrease the gliding velocity. Here after this phenomenon is called as **[Pattern C]**.

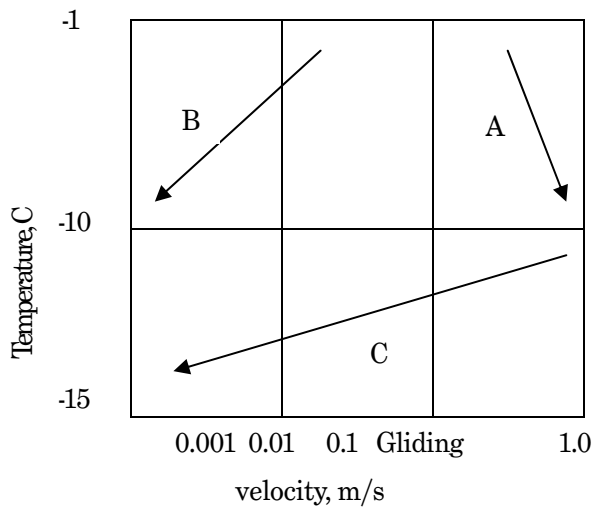


Fig. 7. Three patterns of the μ . An arrow shows the direction of the decreasing of μ values.

3.3 Discussion of [Pattern A] --- high velocity and high temperature---

As a gliding at higher the temperature and/or the faster the velocity seems to generate easily the melt-water, it looks reasonable that the [Pattern A] can be explained by means of the melt-water lubrication hypothesis.

The frictional heat (Q) expressed as follows;

$$Q = \mu M v$$

Where M is the normal force, v is the gliding velocity and μ is the frictional coefficient. According to the upper equation, as if the normal force and/or the velocity are increased, the frictional heating and then the thickness of water film would be increased and the friction force would be decreased. In fact, the lowest of μ appeared at around -3 °C for actual ski gliding of racing condition. (Buhl et. al., 2001)

<Normal force effect of μ . (Natural snow)>

According to the melt-water lubrication hypothesis, it is reasonable that the μ is

expected to be small when the velocity and/or normal force are increased. (Same with Pattern A) It is frequently quoted in the ski science field that the main mechanism of the friction of ice at higher the velocity than 0.01 m/s is explained by the lubrication of the melt-water of ice which generated by the frictional heating. (Bowden and Hughes, 1939) Velocity dependences of the μ accompanied with the load change of the model ski at several temperatures are shown in Fig. 8. The load was changed by adding metal plate attachments to be the normal force twice or forth.

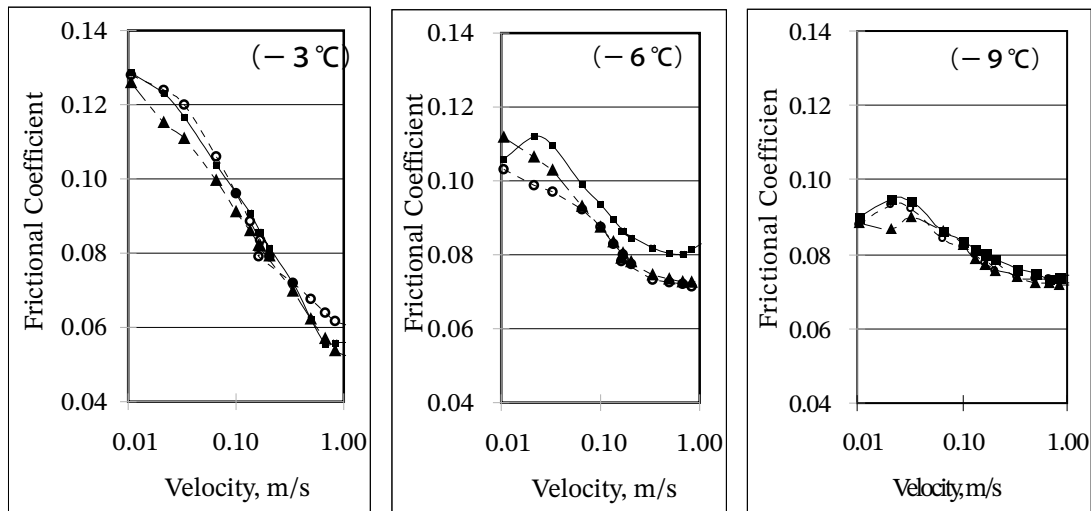


Fig. 8. The velocity dependence of the μ using different load ($\circ$:usual weight, $\blacktriangle$:twice, $\blacksquare$:forth) of the ski at several temperatures with natural snow. (The tribometer method in fresh air of the Sugadaira Observatory)

As the same with Fig.5 and 6, the μ at lower velocity was larger at higher temperature. Namely the opposite temperature dependency with the actual ski of the μ was observed. (Classified into Pattern B) It is clear from the above experimental data that the μ was decreased when the gliding velocity was increased but an obvious normal force effect was not observed even the force become twice or forth for any temperature. As a conclusion for the gliding of short model ski over the packed snow, it is unlikely that the melt-water is generated at around 1 m/s for any temperature. We have to reexamine the mechanisms of friction at 0.01 to 1 m/s for pattern A.

3.4 Discussion of [Pattern B] --- low velocity and high temperature ---

The μ was decreasing with going down the snow temperature until -10°C for any snow type at around 0.3 m/s procured by the slope glides method (Fig. 5). Those μ values were exceptionally small as a friction between usual solids. Fig.6 was rewritten to Fig. 9, in which the μ vs. the temperature for each observed gliding velocity are shown.

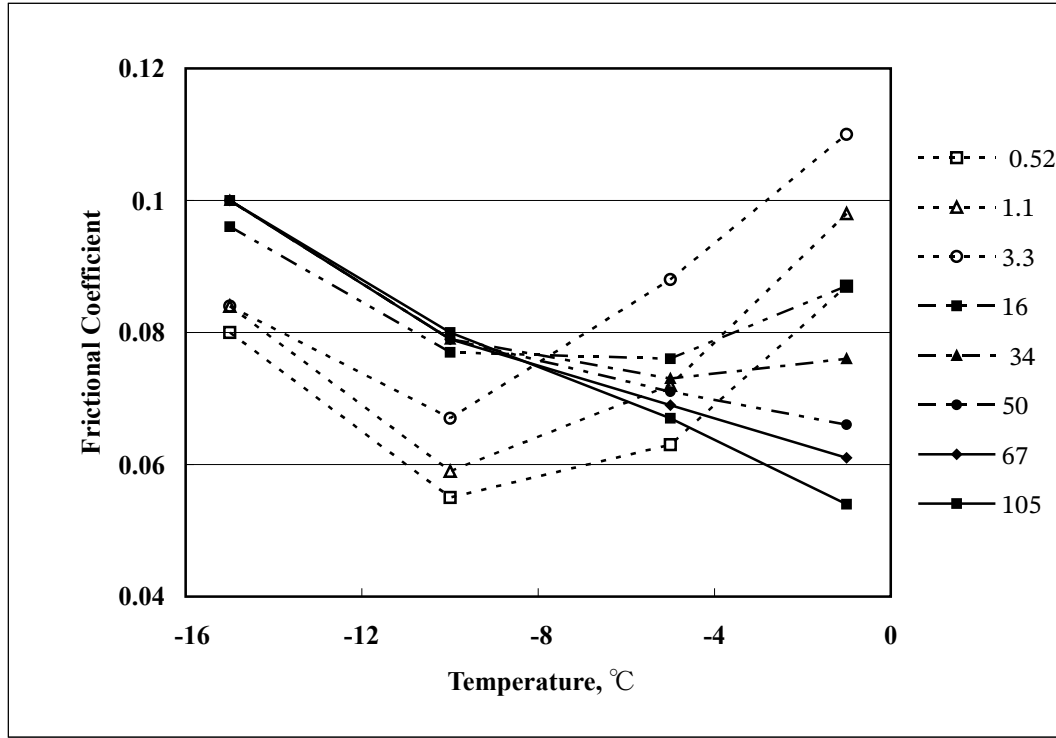


Fig. 9. The μ vs. the temperature for each gliding velocity (cm/s).

From Fig.9, it is clear as follows:

- Temperature dependency of the μ was drastically changed with the gliding velocity at high temperature.
- For the gliding of faster than 0.5 m/s, the μ was roughly proportional to the snow temperature. (Classified into Pattern A) But for lower than -10°C , it is unlikely that the melt-water is generated.
- The higher the temperature show larger the μ for the gliding of slower than 0.1 m/s when the temperature is higher than -10°C . (Classified into Pattern B)

It is known that the frictional resistance between ices is generated by the adhesion at the contact surfaces when the gliding velocity is slower than 0.01 m/s. The friction force is regarded as the plastic shear deformation force of the thin film of ice between the contact surfaces. (Bowden, 1964, Barnes, 1971, Tusima, 1977) To connect the frictional resistance of ice, it was reported that the μ of a steel ball on a single crystal of ice at very low gliding velocity (which means no melt-water generation), show also very small value (0.005 to 0.2). The μ value on the prismatic plain was twice as large as that on the basal plane and there was no normal force effect, which were explained

by adhesion theory. (Tushima, 1977) According to the well-known melt-water lubrication hypotheses, it is unlikely that the melting point are different with the crystal axis of the same crystal. Highly crystallized high density polyethylene is frequently used as a ski sole which show good qualities for ski sole material such as anti-abrasion, not difficult to process, elastic at low temperature and small adhesion force with snow which seems the key quality of this paper. According to our experimental results, the μ was decreasing with decrease the gliding velocity at very low temperature (lower than $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$) and at high temperature (-5 to $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$) of low velocity (lower than 0.03 m/s). Further, as an obvious normal force effect was not observed even the force become twice or forth at any temperature($-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ to $-9\text{ }^{\circ}\text{C}$), in this temperature and gliding velocity range, it is likely that the friction force of the model ski is generated with the adhesion between the snow and the polyethylene. Further, in spite of the very slow gliding velocity (0.05 m/s or slower) and the low temperature ($-10\text{ }^{\circ}\text{C}$) in which condition no melt-water is expected, the μ of the polyethylene-base model ski (length; 20 cm) show fairly small values (0.05 or smaller). There is a possibility that the μ of the model ski become small without the melt-water as a lubricant. It is noteworthy result that the μ value of this experiment was close to the μ of the real ski gliding which is explained by the melt-water generation.

---Why the μ at low velocity showed opposite temperature dependency with the gliding of high velocity (or the real ski)? ---

The existence and its thickness of the liquid-like layer at the friction surface would be very important factor for an evaluation of the adhesion forces. We can anticipate that there are two kinds of intermolecular interactions are working between polyethylene and snow (water); One is the dipole-dipole interaction which work between C-H bond local dipole of polyethylene and the dipole of a water molecule, and the others are the dipole-induced dipole interaction which work between C-H bond local dipole and the water molecule, and a dipole of a water molecule and polyethylene. The interaction energy of dipole-dipole interactions show opposite effect (attractive or repulsive force) accompanied with the mutual orientation of dipoles and those of dipole-induced dipole interaction show always attractive energy. As the orientation of molecules is at random for both surfaces, the dipole-dipole interaction is not arisen in bulk. On the other hand, the dipole-induced interaction is always arisen and which strength is proportional to r^{-6} . Where r is the distance between the dipole and the induced-dipole. As the interaction is a short range force, the role of liquid-like layer would be essential for surface phenomenon such as adhesion.

In the ski case, interaction between polyethylene and snow, it seems that the attractive interaction force would be arisen with the dipole-induced dipole interaction. The dielectric constant of liquid water is far larger compare to the one of solid ice, because of the mobility of water molecules is far larger for liquid water. The interaction energy of polyethylene is expected to be larger with the liquid-water than with the solid-ice. It is well-known that the thickness of the liquid-like layer of snow crystal is increased with going up the temperature close to the melting point. (R. Rosenberg, 2005) It is consistent that the thickness of the liquid-like layer of snow becomes thin for the low temperature and the μ value of low velocity gliding (less than 0.3 m/s of Fig.6 and Fig.8) also become small accompanied with the going down of the temperature. As a result, it is reasonable that the temperature dependence of the μ at low velocity is explained as if the liquid-like layer become thin and then the adhesion force also become small. In this case, the gliding resistance is consisted with the shear force of the adhesion between snow and the polyethylene sole and means a plastic deformation of the liquid-like layer at the contact surface. Consequently, the opposite phenomena of the temperature dependency of the μ (higher the temperature show larger the μ) at low velocity (around 0.01 m/s) is explained with rapid increase of the thickness of liquid-like layer.

3.5 Discussion of [Pattern C]- -- low temperature effect---

The μ of low velocity was increasing with going down the temperature from -10 °C. The liquid-like layer is practically disappeared and at the same time the hardness of the ice is increased drastically around -10 °C. (Bowden and Tabor, 1964) Then the origin of the adhesion force is changed from the liquid-like layer-polyethylene to the solid ice-polyethylene, and an attractive interaction force is decreased but the destruction force(shear force) of the interface material would be increased because of the ice is harder than liquid-like layer.

On the other hand, it is likely that the interaction force which generated by the sintering between snow and the polyethylene sole surface is increased when the temperature goes down at very low velocity. Then the shear fracture force would be increased when the temperature goes down. The brake effect generated with sintering would be increased. Further, the snow crystal is also hardened and the plastic deformation of the crystal becomes difficult. These several effects seem to associate for increasing the brake effect at very low temperature.

But on my experience at colder than -50 °C in the Japanese Mizuho camp of Antarctica,

skating ski was easy on hard packed snow but not comfortable in snow drift.

4. Conclusion

For the elucidation of the mechanism of friction between snow and ski, frictional resistance coefficients (μ) of a short slider (20 cm length) at low gliding velocity (0.001~1 m/s) were observed near the melting point of snow (-20 ~ -1 °C) by means of the slope glides method and the tribometer method. As the experimental results, the μ values were depending upon the gliding velocity and the snow temperature. The smallest μ , observed at around -10 °C and slower than 0.01 m/s in which condition no melt-water is expected, was similar to the value of the best condition of the usual skiing. It is reasonable that the temperature dependence of the μ at low velocity (lower than 0.02 m/s), which showed the opposite dependence with the usual ski gliding, is explained as if the liquid-like layer become thin and then the adhesion force also becomes small. In this case, the gliding resistance is consisted with the shear force of the adhesion between snow and the polyethylene sole and means a plastic deformation of the liquid-like layer at the contact surface. The μ of fast glides (higher than 0.5 m/s) near the melting point were decreasing with increase the velocity but an obvious pressure effect was not observed even the pressure become twice or forth. It is unlikely that the melt-water is generated at around 1 m/s for any temperature. We have to reexamine the mechanisms of friction at 0.01 to 1 m/s near melting point.

Acknowledgements

We are grateful to the late emeritus professor Shigetaka Kuroiwa for the enlightening discussions that have been of great help to focus our experiment at the beginning of the investigation of this field. We also thank undergraduate course students of the University of Electro-communications for their assist of our experiments. This work has been financially supported in part by Grant-in-Aids for Scientific Research Nos. 16500395 and 19500528.

References

- (1) D. Lind and S.P. Sanders (1997) The physics of skiing: Skiing at the triple point. AIP Press, New York
- (2) F.P. Bowden, and T.P. Hughes (1939) Mechanism of sliding on ice and snow. *Proceedings of the Royal Society, London, Ser. A*, 172:280-298
- (3) K. Tusima and Z. Yoshida (1969) Melting of Ice by Friction. *Low Temperature*

- Science, Ser. A*, 27:17-30
- (4) S.C. Colbeck and G.C. Warren, (1991) Thermal response of downhill skis. *Journal of Glaciology*, 37:228-235
- G Warren, S.C. Colbeck and F.E. Kennedy (1989) The thermal response of downhill skis. *CRREL Report* 89-23:40p
- (5) D. Buhl, M. Fauve and H. Rhyner (2001) The kinetic friction of polyethylene on snow: the influence of the snow temperature and the load. *Cold Regions Science and Technology*, 33:133-140
- (6) S.C. Colbeck (1992) A review of the Processes that control snow friction. *CRREL Monograph* 92-2. Hanover, NH
- (7) J. Hamalainen and E. Spring (1986) The influence of snow hardness on ski friction. *Commentationes Physico-Mathematicae*, 76:1-17
- (8) I. Tomisawa, K. Nikki, S. Haizuka and A. Ishii (2001) A combined measurement system for discriminating complex resistances affecting ski sliding. *Science and Skiing 2. (2nd International Congress on science and skiing)*, Hamburg.
- (10) F.P. Bowden (1964) Friction between ski and snow. *New Scientist*, 376, 275-277
- (11) D. Barnes, D. Tabor and J.C.F. Walker (1971) The friction and creep of polycrystalline ice. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*. 324:127-155
- (12) K. Tusima (1977) Friction of a steel ball on a single crystal of ice. *Journal of Glaciology*, 19:225-235
- (13) R. Rosenberg (2005) Why is ice slippery? *Physics Today*, December, 50-55

2009.7.14

低速域におけるポリエチレン基材モデルスキーの摩擦抵抗：温度・速度・圧力依存性

Kunio Nikki, Katsumi Kaneko, Satoru Saito, Hideaki Kasahara, Hikaru Nakazato, Ichiro Tomisawa, Syoji Haizuka^a, Osamu Abe^b, Akira Ishii^c

^a 電気通信大学（日本・東京都調布市）

^b NIED 雪氷研究センター 新庄支所

^c 香川大学（日本・香川県高松市）

要旨

低速滑走（0.001 ～ 1 m/s）におけるモデルスキー（全長 20 cm）の摩擦抵抗係数（ μ ）を、雪の融点近傍で、斜面滑走法およびトライボメータ法により観測した。 μ は滑走速度と雪温に依存し、最小の μ はおよそ -10°C で、かつ 0.01 m/s 未満の低速域で確認された。温度依存性に関して特筆すべき点として、実際のスキーとは逆の傾向が得られた。モデルスキーでは低速域において明確な荷重効果が見られなかったことから、雪面の摩擦加熱による融解水膜が生じなくてもモデルスキーの μ が小さくなり得る可能性が示唆され、摩擦抵抗の主要因は凝着であると考えられる。さらに、滑走速度に伴って現れる μ の逆温度依存性は、雪面に存在する液体様層に起因する凝着現象によって説明した。

著者キーワード：摩擦抵抗係数；ポリエチレン；雪温；滑走速度；融解水潤滑；液体様層；凝着

論文構成

1. 1. はじめに
2. 2. 材料および方法
3. 3. 実験結果と考察
4. 4. 結論

謝辞

参考文献

1. はじめに

いわゆる「摩擦」に関連したスキー滑走の研究には、長い歴史がある (Lind and Sanders, 1997)。一般に「摩擦」という語は、滑走抵抗を生み出すすべての要因を含む意味で用いられている。締まりの弱い雪面で実際にスキーが滑る際には、スキー直下で生じる雪の塑性変形、スキー前方での圧雪・排雪（プラウ）による抵抗、さらにスキーの反り上がり部（およびスキーヤー）に作用する空気抵抗が重要な要因であることは理解しやすい。しかし、空気抵抗を除けば、そうした付加的抵抗についての定量的な実験結果はほとんど報告されていない。スキー滑走の摩擦抵抗を明らかにするには、スキーと雪の間に働く単純な機械的「摩擦」の概念を、滑走抵抗全体から切り分けて考える必要がある。平坦でよく締まった雪面を低速で滑るときの滑走抵抗は氷上での値に近く、その場合は一般的な摩擦抵抗として扱えるだろう。氷-氷の相互作用については、極低速かつ極低温での滑走抵抗がしばしば研究されてきた。本論文では、低速を $0.001 \sim 1 \text{ m/s}$ 、低温を $-10 \sim -20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 、高温を $-5 \sim 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ とする。

スキーの動摩擦係数 (μ) は、一般的な固体同士の接触における μ と比べて、きわめて小さいことがよく知られている。この低摩擦は、滑走面（ソール）と雪の表面の間で生じる摩擦発熱によるものだと考えられている。発生した熱によって薄い融解水の層が形成され、それが潤滑剤として働くことで固体間の摩擦力が低下する。(Bowden and Hughes, 1939) 融解水潤滑の考え方を裏づける証拠は数多い。たとえば、摩擦熱が蓄積する滑走面と氷の界面において、実験室で融解水が観察されている。(Tusima and Yoshida, 1969) また、ダウンヒルスキーが $2 \sim 10 \text{ m/s}$ で滑走する際、熱電対により融点近傍 ($-10 \sim 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$) でソール温度の上昇が観測された。滑走中のスキーベースの最高温度は周囲温度に依存していた。(Colbeck and Warren, 1991) 近年では、レース条件下における雪温の影響 (μ が最小となるのはおよそ $-3 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 付近) が強調されている。(Buhl et al., 2001) さらに、さまざまな条件でのスキー滑走を理解するため、融解水潤滑以外の滑走理論も提案されてきた。雪の摩擦に関する多くの研究は Colbeck によってレビューされ、議論されている。(Colbeck, 1992)

雪上におけるスキー滑走の界面現象の物理を理解するには、実接触面積、熱の伝導、そして融解水の役割に関する知見が不可欠だと思われる。しかし、アルペンスキーの μ 値は通常きわめて小さい

(0.05 未満) の場合、実際のスキーで観測された μ から、滑走抵抗における個々のエネルギー損失の影響を見積もることは不可能である。スキーが滑り始めると、スキーと接触する雪面の温度は摩擦で上昇し、その熱はスキーが通過するまで蓄積される。スキー側から見ると、雪面との摩擦によりソールには熱が蓄えられる一方、ソール上部は新たに流入する雪と空気によって常に冷却される。したがってソール温度は、スキー上面からの距離に依存すると考えられる。摩擦条件もソールの位置によって異なる。さらに熱の蓄積は、スキー材料の熱伝導率、雪の状態、周囲温度などにも左右される。実験で得られるのは、滑走中のスキーの平均的な μ 値に限られる。実験で摩擦パラメータを変化させても、ソール各部位の摩擦状態を個別に解析することはできない。滑走中スキーの実際の接触面積を推定することも難しい。ソール温度は観測できても、スキーに擦られる雪粒子表面の温度は観測できない。短いスライダーの μ 値は実スキー先端部のそれに相当するため、摩擦機構はより単純で、特に低速では熱の蓄積が生じにくい。

本論文では、低速域における短尺モデルスキーのほぼ固有の摩擦抵抗を、トライボメータ法および斜面滑走法により観測した。実験は、NIED の低温環境シミュレータにて人工雪を用い、入念に作製した硬く締まった平坦雪面上で行ったほか、長野県の電気通信大学・菅平観測所にて外気条件下で多様な自然雪を対象に実施した。雪温、滑走速度、荷重が μ に及ぼす影響を測定し、摩擦抵抗のメカニズムについて検討した。

2. 材料および方法

圧雪上における短尺モデルスキー（ポリエチレンベースのスライダー）の低速域での滑走摩擦を、斜面滑走法およびトライボメータ法により測定した。

2.1 モデルスキー

モデルスキーは、ポリエチレン製ソールを備えた実際のアルペンスキーを加工して作製した。所定の長さに切断し、ソール側のポリエチレン内にジュラルミン板を挿入することで、滑走面を平坦に整えた。モデルスキーの長さとは幅は

それぞれ 20 cm と 8 cm。重りは最大で 4 倍まで変更可能。ワックスは使用していない。

2.2 雪の準備

試料雪として、NIED（防災科学技術研究所）の低温圏環境シミュレータで作製した人工雪と、長野県菅平で採取した各種の天然雪を用いた。雪はプラスチック箱内で約 15 分間ブーツで踏み固め、その後ふるいにかけた。調製した雪をトライボメータのターンテーブル、または斜面滑走法に用いる雪斜面ボックスに載せ、表面を平坦に整えた。雪の硬さは、スキーが雪に沈み込むことで生じるエネルギー損失と滑走抵抗とを切り分けるうえで重要な要因であるが、表面硬さを狙いどおりに制御するのは容易ではない（Hamalainen and Spring, 1986）。一方で、雪密度は比較的制御しやすく、スキーの沈み込みの影響と 관련된重要な因子と考えられる。本研究では、一連の実験で試験用雪トラックの雪密度が同一となるように調製した。試料雪の密度は $360 \sim 550 \text{ kg/m}^3$ に固定した。実験前に、観測された温度条件下で 6 ～ 16 時間焼結させ、表面を硬化させた。



図 1 焼結前の雪結晶と、焼結後に締め固められた雪面。(格子は、雪結晶では 1 mm、雪面では 2 mm をそれぞれ示す。)

試験雪の表面硬さは、自作の貫入式硬度計により測定した。圧力 2 kg/cm^2 （加圧ヘッド直径 1 cm）での押し込み深さは約 0.02 mm であった。この深さは雪粒径と同程度のオーダーである。モデルスキーの接触面における圧力は約 4 g/cm^2 （実スキーの 1/2）であった。以上より、試験雪の表面状態は実際のスキー滑走時と比べても十分に硬く、塑性変形による雪の変形や、締め固め・掘り起こし（ブラウ）に伴う抵抗は無視できると結論づけられる。

2.3 摩擦係数の測定方法

2.3.1 斜面滑走法

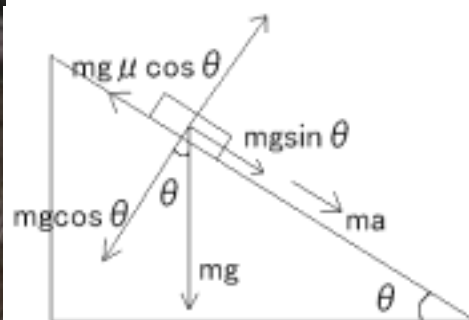
図 2 に示すように、全長 20 cm のモデルスキーを圧雪された平坦な雪面斜面上で滑走させた。モデルスキーの位置は、超音波距離センサ (KEYENCE UD-501、サンプリング時間:17.5 ms、0.5 m/s における距離精度:8 mm) により測定した。斜面上を滑るスライダの力のつり合いを図 2(b) に示す。斜面上のスライダに働く摩擦力 (F) は、次式で表される。

$$F = mg\mu\cos\theta = mgsin\theta - ma$$

ここで m はスライダの質量、 g は重力加速度、 θ は斜面角、 μ は動摩擦係数、 a はスライダの加速度である。滑走速度と加速度、さらに μ は、距離データと時間から算出した。



図 2. (a) 斜面滑走法．斜面．



(b) 斜面上のモデルスキーにおける力のつり合い

図 3 に示すように、超音波距離センサにより距離と時間の関係が得られる。スライダの速度は、時間と距離の関係から導出される。

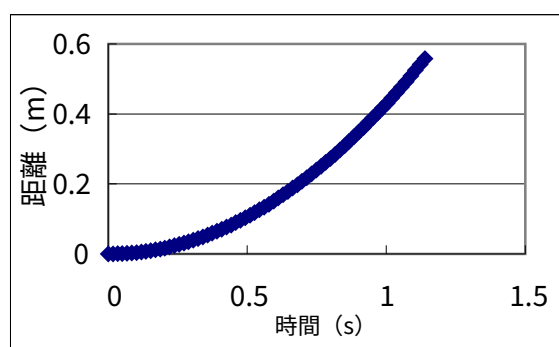


図 3 滑走時の時間 対 距離データの一例。

2.3.2 トライボメータ法。

トライボメータの模式図を図4に示す。(Tomisawa ほか, 2000) ターンテーブルの直径は 180 cm であるため, 低い滑走速度では(摩擦に起因する遠心力は無視できるほど小さい), 雪面トラックをモデルスキー(長さ: 20 cm, 幅: 8 cm)に対する擬似直線トラックとみなすことができる。スライダ「S」はロードセルを介して静止フレーム「L」に固定され, 速度制御装置付きの電動モータによって大型の雪テーブルがモデルスキーの下で回転する。テーブル上のトラックの雪面は, 静止フレーム「L」に正確に水平となるよう取り付けられた整地ブレード「FB」により準備される。見かけの μ は, ロードセルでスライダの牽引力「T」を測定することで容易に求められる。 $(T = \mu \times mg)$ 実際のトラックの回転角と速度は, テーブル中央に設置されたロータリエンコーダ「R」により測定される。

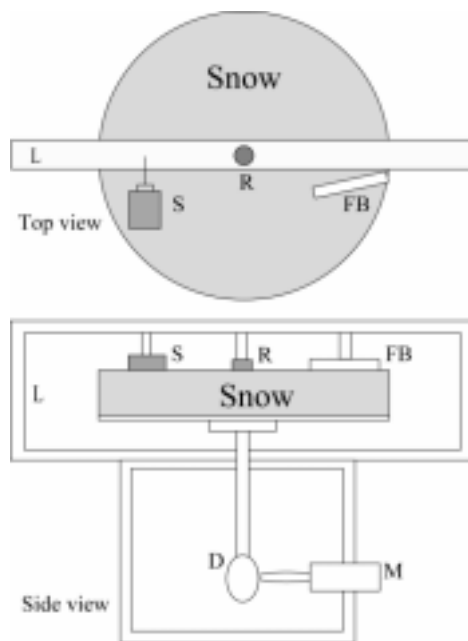


図4. (a) トライボメータの模式図。(L: 静止フレーム, FB: 整地ブレード, S: スライダ, R: ロータリエンコーダ, D: 差動ギアボックス, M: モータ)



(b) モデルスキーがトライボメータの平坦な雪面上を滑走している。

3. 実験結果および考察

3.1 μ の温度依存性 (斜面滑走法)

モデルスキー（長さ 20 cm）を、新雪・締まり雪・しもざらめ雪などの天然雪で作った平坦な斜面上で滑走させた。 μ は、長野県菅平の新鮮な外気条件下で、滑走速度約 0.3 m/s において測定した。 μ vs. 雪温の関係を図 5 に示す。

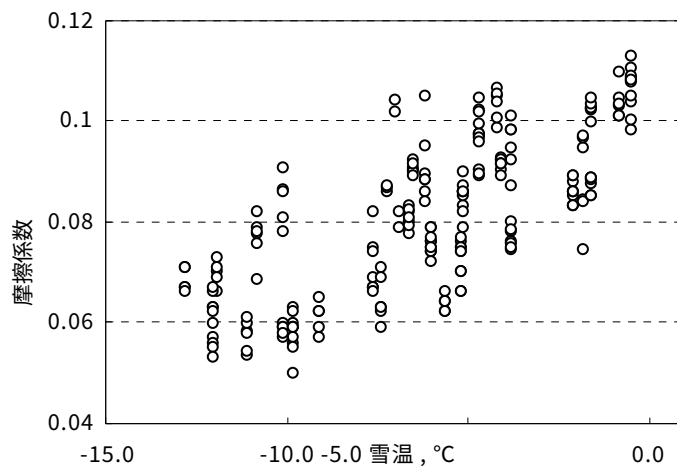


図 5. 菅平における斜面滑走法による各種天然雪の μ 値 vs. 温度。(滑走速度は約 0.3 m/s。)

雪温が下がるにつれて、 μ の値は低下することが確認された。この μ の挙動は、高速で滑走する小型スライダーで知られている結果とは逆の温度依存性を示す。(Bowden and Hughes, 1939) さらに、 μ が約 -10°C (約 0.05) における値は、最良の滑走条件の

実際のアルペンスキー (−3〜−5℃)。(Buhl ほか, 2001)

3.2. μ の速度依存性。(トライボメータ法)

より精密な μ の速度依存性は、NIED の低温環境シミュレータ内で電動モータにより滑走速度を一定に制御できるトライボメータを用いて観測した。斜面滑走法では、滑走開始から3秒以内に速度が1 m/sに達する。スキーの滑走面温度は、再生成が起きる場合でも単純に上昇していく。一方トライボメータでは、モデルスキーが長時間にわたり一定速度で滑走する。摩擦面については、再生成効果と新雪による冷却効果を同時に考慮する必要がある。モデルスキーの観点では、同一の滑走速度の間、滑走条件は一定とみなせる。実験には、−15℃で作製し、ポリエチレン袋に入れて−20℃で2か月保存した樹枝状の人工雪を用いた。圧密した人工雪を粒子状に砕き、ふるいに通して箱内で再び圧密し、トライボメータのターンテーブル上に載せた。観測温度で表面を平坦化した後、16時間焼結させた。各温度における μ vs. 滑走速度の関係を図6に示す。

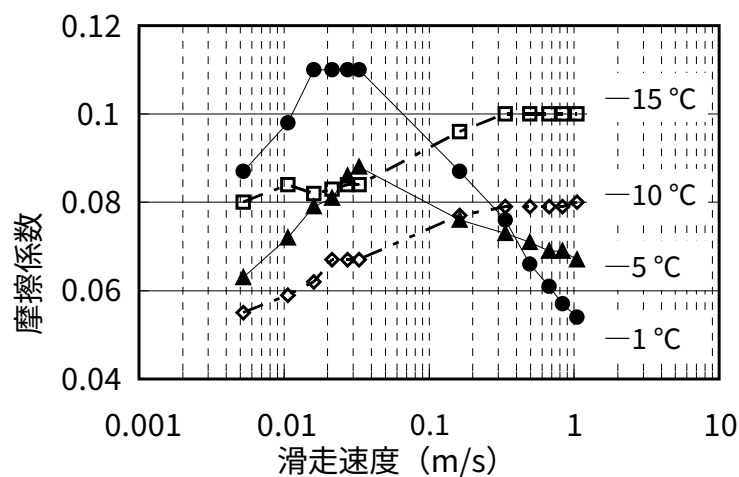


図6. 複数の温度における人工雪の μ と滑走速度の関係。(NIED の低温環境シミュレータでトライボメータを使用)

観測データは、図7に示すように3つのパターンに分類された。

a) 融点近傍における高速滑走 (0.5 m/s 以上) では、 μ は速度の増加とともに低下した。以後、この現象を [パターンA] と呼ぶ。8

b) 非常に低速の滑走（0.02 m/s 未満）では、速度が低下するほど μ が低下し、その絶対値は雪温が $-1 \sim -10^\circ\text{C}$ へ下がるにつれて小さくなった。図 5 と同様に、実際のスキーにおける μ とは逆の温度依存性が示された。以後、この現象を [Pattern B] と呼ぶ。

c) 非常に低温（ -10°C 未満）の条件では、滑走速度の低下に伴い μ が低下した。以後、この現象を [Pattern C] と呼ぶ。

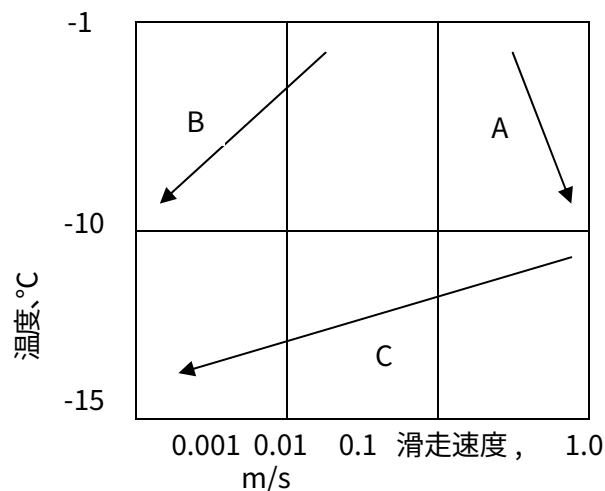


図 7. μ の 3 つのパターン。矢印は μ 値が低下する方向を示す。

3.3 [パターン A] の考察——高速度・高温条件——

温度が高いほど、また速度が速いほど融解水が生じやすいと考えられるため、[パターン A] は融解水潤滑仮説によって説明できるとみるのが妥当である。

摩擦熱 (Q) は次式で表される；

$$Q = \mu M v$$

ここで M は垂直抗力、 v は滑走速度、 μ は摩擦係数である。上式より、垂直抗力および／または速度が増加すると摩擦発熱が増え、その結果として水膜の厚さが増し、摩擦力は低下すると考えられる。実際、レース条件における実スキーの滑走では、 μ の最小値はおよそ -3°C 付近で現れた。(Buhl et. al., 2001)

垂直抗力が μ に及ぼす影響（天然雪）>

融解水潤滑仮説に基づけば、 μ は

速度および／または法線力が増加すると、小さくなると予想される。(パターン A と同様) スキー科学の分野では、0.01 m/s を超える速度域における氷の摩擦の主要因は、摩擦発熱によって生じた融解水が潤滑として働くためだと、しばしば引用されている。(Bowden and Hughes, 1939) 複数の温度条件において、モデルスキーの荷重を変化させた際の μ の速度依存性を図 8 に示す。荷重は金属板のアタッチメントを追加し、法線力が通常の 2 倍または 4 倍となるように変更した。

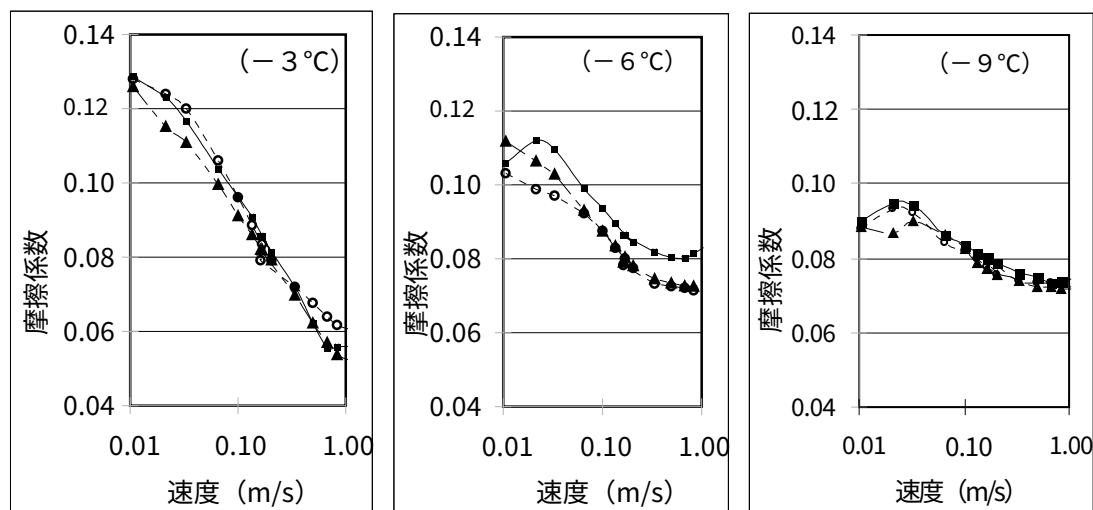


図 8. 自然雪における、複数温度条件でのスキーの荷重別 (○:通常荷重、▲:2 倍、■:4 倍) による μ の速度依存性。(菅平観測所・屋外新鮮空気中でのトライボメータ法)

図 5 および図 6 と同様に、低速域では高温ほど μ が大きかった。すなわち、実際のスキーで見られる μ の温度依存性とは逆の傾向が観測された (パターン B に分類)。上記の実験結果から、滑走速度の増加に伴い μ は低下する一方、温度にかかわらず法線力を 2 倍・4 倍にしても明確な影響は確認できなかった。締雪上を短いモデルスキーで滑走させる条件では、いずれの温度でもおよそ 1 m/s 付近で融解水が生成される可能性は低い。パターン A については、0.01~1 m/s における摩擦機構を再検討する必要がある。

3.4 [パターン B] の考察 — 低速・高温域 —

斜面滑走法で得られた約 0.3 m/s の条件 (図 5) では、雪温が -10°C まで低下するにつれて、雪質にかかわらず μ は減少した。これらの μ は、一般的な固体同士の摩擦としては例外的に小さい値である。図 6 を図 9 として描き直し、観測された各滑走速度ごとに μ と温度の関係を示した。

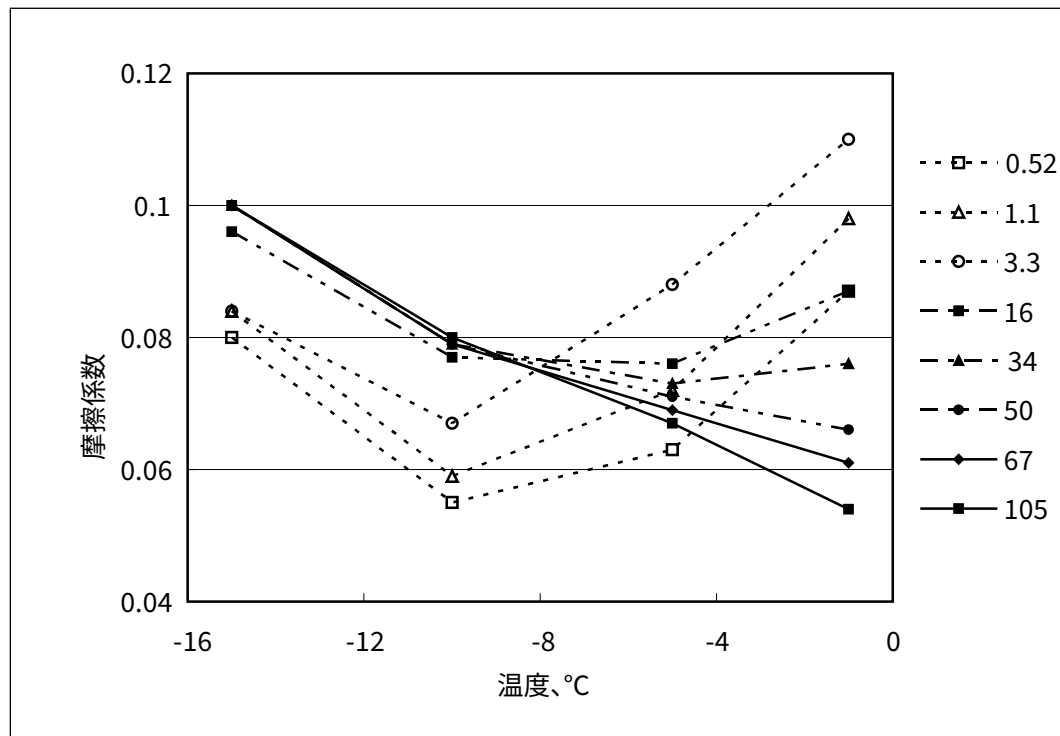


図 9. 各滑走速度 (cm/s) における μ と温度の関係。

図 9 より、以下のことが明らかである。

a) 高温域では、滑走速度の違いにより μ の温度依存性が大きく変化した。

b) 0.5 m/s を超える滑走では、 μ は概ね雪温に比例した (パターン A)。ただし -10°C 未満では、融解水が生じる可能性は低い。

c) 温度が -10°C より高い条件で、0.1 m/s 未満の低速滑走では、温度が高いほど μ が大きくなる傾向を示した (パターン B)。

滑走速度が 0.01 m/s 未満のとき、氷同士の摩擦抵抗は接触面での付着によって生じることが知られている。摩擦力は、接触面間にある薄い氷膜の塑性せん断変形による力とみなされる。(Bowden, 1964, Barnes, 1971, Tusima, 1977) さらに氷の摩擦抵抗に関連して、極めて低い滑走速度 (すなわち融解水が生じない条件) における単結晶氷上の鋼球の μ も、非常に小さい値 (0.005 ~ 0.2) を示すことが報告されている。柱面での μ は底面の約 2 倍で、法線荷重の影響は見られず、これらは次のように説明された

付着理論によれば。(Tushima, 1977) よく知られた融解水潤滑仮説に照らすと、同一結晶内で結晶軸によって融点異なる可能性は低い。高結晶性の高密度ポリエチレンは、耐摩耗性に優れ、加工しやすく、低温でも弾性を保ち、雪との付着力が小さいといったスキー滑走面材としての長所を備えるため、スキー底材としてしばしば用いられている。とりわけ雪との小さな付着力は、本論文の要点となる性質である。実験結果によれば、 μ は、極低温 (-10°C 未満) では滑走速度の低下に伴って減少し、また高温域 ($-5\sim-1^{\circ}\text{C}$) でも低速 (0.03 m/s 未満) では同様に減少した。さらに、いずれの温度 ($-3^{\circ}\text{C}\sim-9^{\circ}\text{C}$) においても、荷重が 2 倍あるいは 4 倍になっても明確な垂直荷重効果は観測されなかったことから、この温度・速度範囲では、モデルスキーの摩擦力は雪とポリエチレンの付着によって生じている可能性が高い。さらに、融解水の発生が見込めないほどの低温 (-10°C) かつ非常に低い滑走速度 (0.05 m/s 以下) であるにもかかわらず、ポリエチレン底のモデルスキー (長さ 20 cm) の μ はかなり小さく (0.05 以下) 示された。潤滑剤としての融解水がなくても、モデルスキーの μ が小さくなり得ることを示唆している。注目すべきことに、本実験で得られた μ 値は、融解水の生成で説明される実際のスキー滑走時の μ に近いものであった。

--- 低速域での μ が、高速滑走 (または実際のスキー) とは逆の温度依存性を示したのはなぜか? ---

摩擦面に存在する液体様層の有無と、その厚さは、付着力を評価するうえで非常に重要な要因になると考えられる。ここではポリエチレンと雪 (= 水) との間で働く分子間相互作用として、主に 2 種類を想定できる。1 つは、ポリエチレンの C-H 結合がもつ局所双極子と水分子の双極子の間に働く双極子 - 双極子相互作用。もう 1 つは、C-H 結合の局所双極子と水分子によって誘起される双極子、ならびに水分子の双極子とポリエチレン側に誘起される双極子の間に働く双極子 - 誘起双極子相互作用である。双極子 - 双極子相互作用の相互作用エネルギーは、双極子の向きの組み合わせによって引力にも斥力にもなり得るのに対し、双極子 - 誘起双極子相互作用のエネルギーは常に引力として働く。両表面の分子配向はランダムであるため、バルクでは双極子 - 双極子相互作用は実質的に打ち消され、顕在化しない。一方、双極子 - 誘起双極子相互作用は常に生じ、その強さは r^{-6} に比例する。ここで r は双極子と誘起双極子の間の距離である。これらは短距離力であるため、付着のような表面現象においては、液体様層が果たす役割が本質的になると考えられる。

スキーの場合、ポリエチレンと雪の相互作用では、双極子—誘起双極子相互作用によって引力が生じていると考えられる。液体の水の誘電率は固体の氷よりもはるかに大きい、これは液体では水分子の運動性が格段に高いためである。ポリエチレンの相互作用エネルギーは、固体氷よりも液体水に対して大きくなると予想される。融点に近づいて温度が上がるほど、雪結晶表面の液体様層の厚さが増すことはよく知られている。(R. Rosenberg, 2005) 低温では液体様層が薄くなり、低速滑走(図6・図8の0.3 m/s未満)における μ 値も、温度低下に伴って小さくなるという傾向とも整合する。したがって、低速域における μ の温度依存性は、液体様層が薄くなることで付着力も弱まり、その結果として説明できる。ここでの滑走抵抗は、雪とポリエチレン底面の付着に由来するせん断力で構成され、接触面の液体様層が塑性変形することを意味する。さらに、低速(約0.01 m/s)では、温度が高いほど μ が大きくなるという逆の温度依存性が見られるが、これは液体様層の厚さが急増することで説明できる。

3.5 [パターンC] の考察——低温の影響——

低速域の μ は、-10℃から温度が下がるにつれて増加した。液体様層はほぼ消失し、同時に-10℃付近で氷の硬さが急激に増すことが知られている。

(Bowden and Tabor, 1964) その結果、付着力の起源は「液体様層—ポリエチレン」から「固体氷—ポリエチレン」へと移り、引力的な相互作用は弱まる一方で、液体様層より氷の方が硬いため、界面材料の破壊力(せん断力)は増大すると考えられる。

一方、極低速で温度が下がると、雪とポリエチレン製ソール表面の焼結によって生じる相互作用力が増す可能性が高い。すると、温度低下に伴って界面のせん断破壊力も大きくなるだろう。焼結によって生じるブレーキ効果も強まる。さらに、雪結晶自体も硬くなり、結晶の塑性変形が起こりにくくなる。こうした複数の要因が重なって、極低温ではブレーキ効果が増大すると考えられる。

しかし、南極の日本・みずほ基地キャンプで-50℃を下回る寒さを経験したときは、

締まった雪ではスケートティングスキーは滑りやすかったが、吹きだまりでは快適とは言えなかった。

4. 結論

雪とスキーの間に生じる摩擦機構を明らかにするため、短いスライダー（長さ 20 cm）を用い、低い滑走速度（0.001 ~ 1 m/s）における摩擦抵抗係数（ μ ）を、雪の融点近傍（-20 ~ -1 °C）で斜面滑走法およびトライボメータ法により観測した。実験の結果、 μ は滑走速度と雪温に依存することが分かった。最小の μ は、融解水の発生が見込まれない -10 °C 付近かつ 0.01 m/s 未満の条件で観測され、一般的なスキーにおける最良条件の値と近かった。通常の滑走とは逆の傾向を示した低速域（0.02 m/s 未満）での温度依存性は、液体様層が薄くなり、それに伴って付着力も小さくなると考えることで説明できる。この場合、滑走抵抗は雪とポリエチレン製ソールの付着に由来するせん断力で構成され、接触面における液体様層の塑性変形を意味する。

融点近傍での高速滑走（0.5 m/s 超）では、速度が上がるほど μ は低下したが、圧力を 2 倍あるいは 4 倍にしても明確な圧力効果は確認されなかった。いずれの温度条件でも、およそ 1 m/s 付近で融解水が生成される可能性は低い。融点近傍における 0.01~1 m/s の摩擦機構を再検討する必要がある。

謝辞

本分野の研究を開始した当初、実験の焦点を定めるうえで多大な助けとなった示唆に富む議論を賜った故・黒岩重孝 名誉教授に深く感謝する。あわせて、実験に協力してくれた電気通信大学の学部学生諸氏にも謝意を表する。本研究は、科学研究費補助金（課題番号 16500395、19500528）の一部支援を受けて実施された。

参考文献

- D. Lind / S.P. Sanders (1997) 『スキーの物理学：三重点におけるスキー』 AIP Press (ニューヨーク)
- (1) F.P. Bowden / T.P. Hughes (1939) 「氷および雪上における滑走の機構」 Proceedings of the Royal Society, London, Ser. A, 172:280-298
- (3) K. Tusima / Z. Yoshida (1969) 「摩擦による氷の融解」 Low Temperature

Science, Ser. A, 27:17-30

- (4) S.C. Colbeck、G.C. Warren (1991) ダウンヒルスキーの熱応答。Journal of Glaciology, 37:228-235
- G Warren、S.C. Colbeck、F.E. Kennedy (1989) ダウンヒルスキーの熱応答。CRREL Report 89-23:40p
- (5) D. Buhl、M. Fauve、H. Rhyner (2001) 雪上におけるポリエチレンの動摩擦：雪温と荷重の影響。Cold Regions Science and Technology, 33:133-140
- (6) S.C. Colbeck (1992) 雪面摩擦を左右するプロセスの概説。CRREL モノグラフ 92-2。ニューハンプシャー州ハノーバー
- (7) J. Hamalainen、E. Spring (1986) 雪の硬さがスキーの摩擦に及ぼす影響。Commentationes Physico-Mathematicae, 76:1-17
- (8) I. Tomisawa、K. Nikki、S. Haizuka、A. Ishii (2001) スキー滑走に影響する複合的な抵抗を識別するための統合計測システム。Science and Skiing 2. (第 2 回 科学とスキー国際会議)、ハンプブルク。
- (10) F.P. Bowden (1964) スキーと雪の間の摩擦。New Scientist、376、275-277
- (11) P. Barnes、D. Tabor、J.C.F. Walker (1971) 多結晶氷の摩擦とクリープ。Proc. Roy. Soc. Lond. A 324:127-155
- (12) K. Tusima (1977) 単結晶氷上における鋼球の摩擦。Journal of Glaciology, 19:225-235
- (13) R. Rosenberg (2005) なぜ氷は滑りやすいのか？ Physics Today、12 月号、50-55